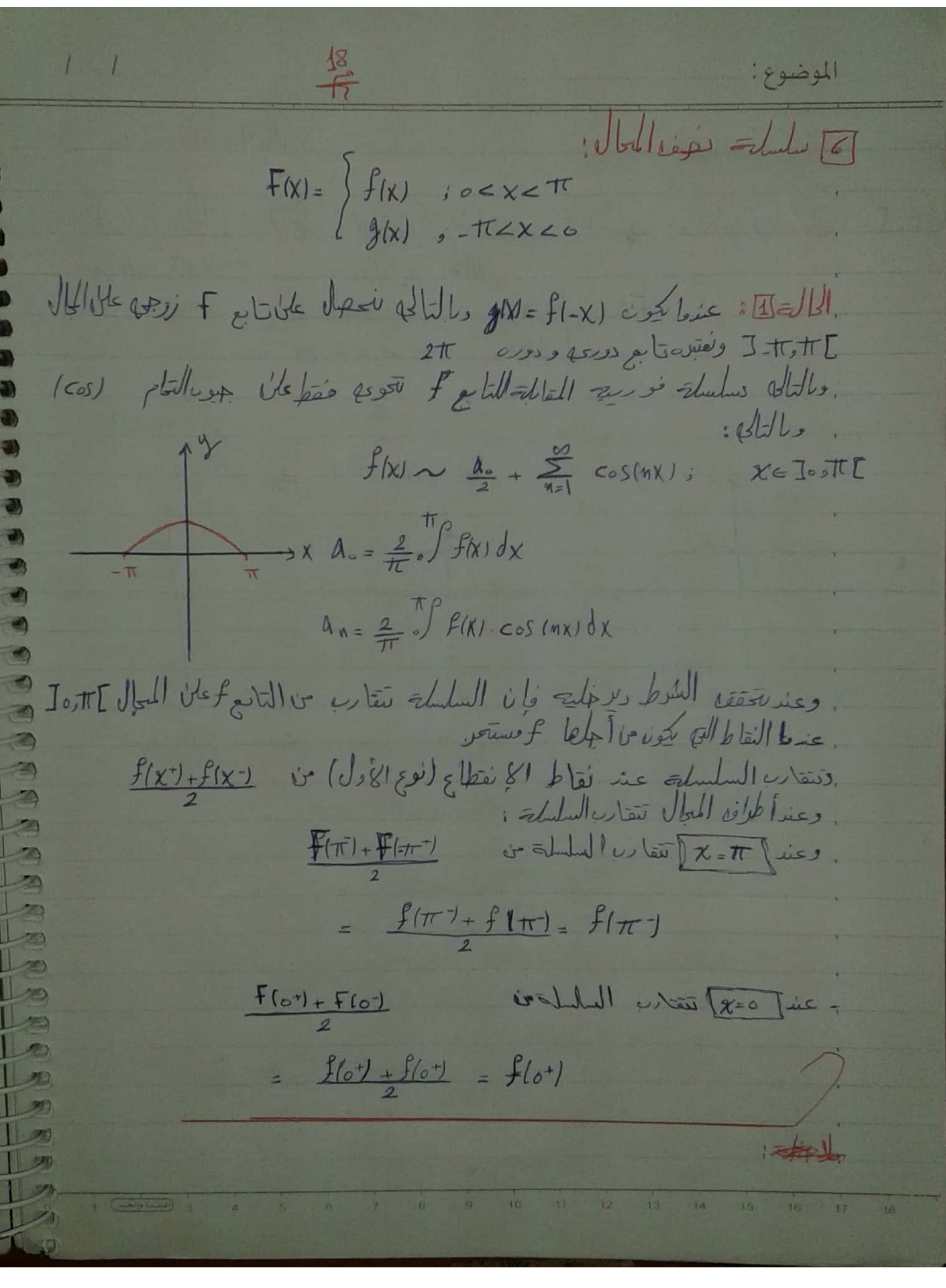


الموضوع:

18/12

6 سلسلة نصف المجال:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; 0 < x < \pi \\ g(x) & , -\pi < x < 0 \end{cases}$$

الحالة 1: عندما يكون $g(x) = f(-x)$ وبالتالي نحصل على تابع F زوجي على المجال $]-\pi,\pi[$ ونعتبره تابع دوري ودوره 2π

وبالتالي سلسلة فورييه المقابلة للتابع F تحوي فقط على جيوب التمام $(\cos)$

وبالتالي:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \; ; \quad x \in]0,\pi[$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

وعند تحقق الشرط ديريخليه فإن السلسلة تتقارب من التابع f على المجال $]0,\pi[$ عند النقاط التي يكون من أجلها f مستمر

وتتقارب السلسلة عند نقاط الانقطاع (نوع الأول) من $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

وعند أطراف المجال تتقارب السلسلة:

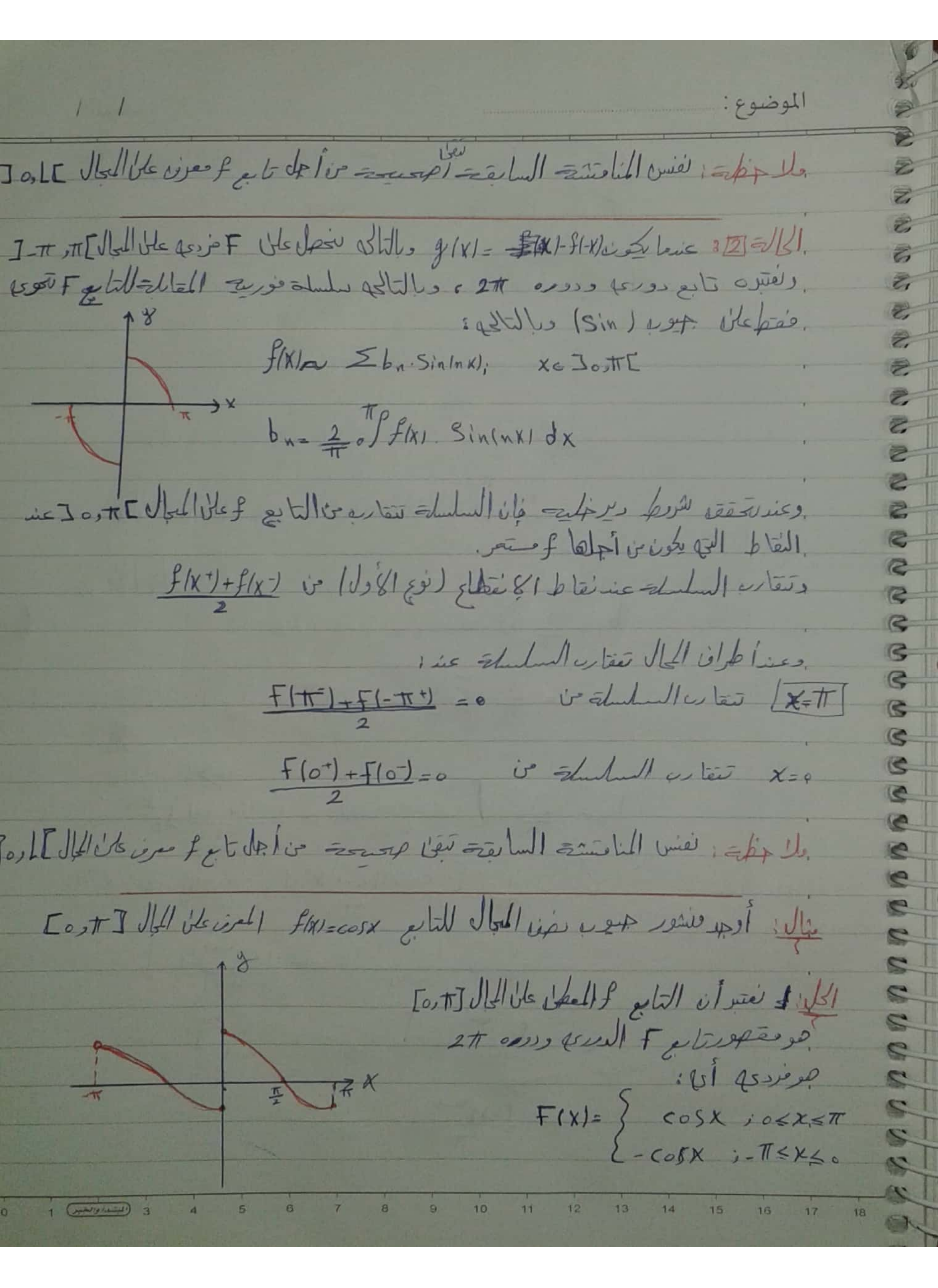
وعند $x=\pi$ تتقارب السلسلة من $\frac{F(\pi^-)+F(-\pi^+)}{2}$

$$= \frac{f(\pi^-)+f(\pi^-)}{2} = f(\pi^-)$$

- عند $x=0$ تتقارب السلسلة من $\frac{F(0^+)+F(0^-)}{2}$

$$= \frac{f(0^+)+f(0^+)}{2} = f(0^+)$$

~~ملاحظة~~:



الموضوع :

ملاحظة: نفس المناقشة السابقة تبقى صحيحة من أجل تابع f معرف على المجال $]0,L[$

الحالة 2: عندما يكون $f(x) = -f(-x)$ وبالتالي نحصل على F فردي على المجال $]-\pi,\pi[$ ونفترض تابع دوري ودوره 2π، وبالتالي سلسلة فورييه المقابلة للتابع F تحوي فقط على جيوب $(\sin)$ وبالتالي:

$$f(x) \sim \sum b_n \sin(nx); \quad x \in]0,\pi[$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx$$

وعند تحقق شروط ديريخليه فإن السلسلة تتقارب من التابع f على المجال $]0,\pi[$ عند النقاط التي يكون من أجلها f مستمر.

وتتقارب السلسلة عند نقاط الانقطاع (نوع الأول) من $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

وعند أطراف المجال تتقارب السلسلة عند:

$x=\pi$ تتقارب السلسلة من $\frac{F(\pi^-)+F(-\pi^+)}{2}=0$

$x=0$ تتقارب السلسلة من $\frac{F(0^+)+F(0^-)}{2}=0$

ملاحظة: نفس المناقشة السابقة تبقى صحيحة من أجل تابع f معرف على المجال $]0,L[$

مثال: أوجد منشور جيوب نصف المجال للتابع $f(x)=\cos x$ المعرف على المجال $[0,\pi]$

الحل: نعتبر أن التابع f المعطى على المجال $[0,\pi]$ هو مقصور تابع F الدوري ودوره 2π فردي أي:

$$F(x)=\begin{cases}\cos x & ; 0\le x\le \pi \\ -\cos x & ; -\pi \le x \le 0\end{cases}$$

لنحسب عوامل فورييه للتابع F :

$a_0 = 0 \quad ; \quad a_n = 0 \quad ; \quad n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(nx + x) + \sin(nx - x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\, dx$$

من أجل $n = 1$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x + \underbrace{\sin 0}_{=0}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0$$

من أجل $n > 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right]$$

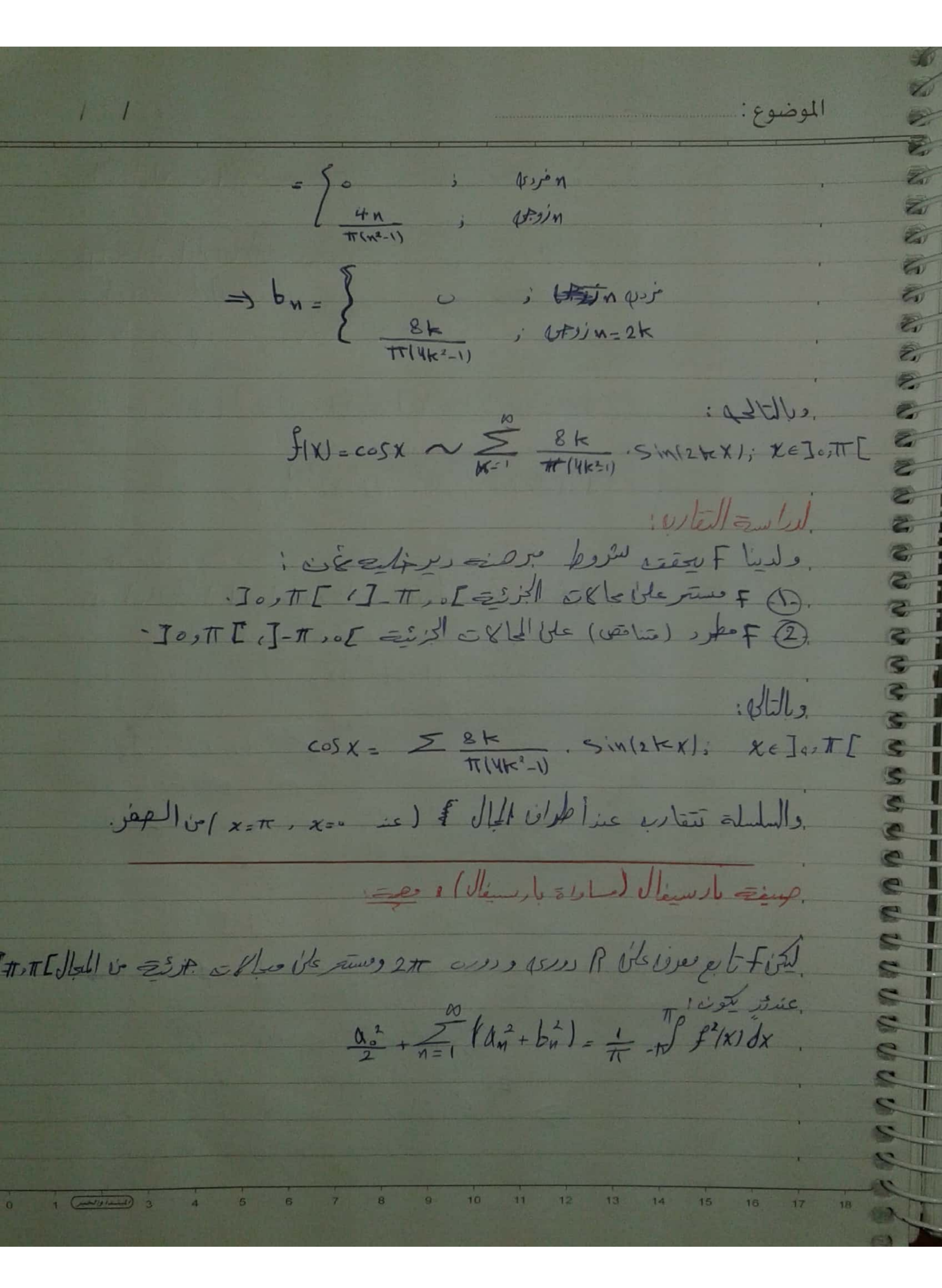
$\cos(n)\pi = (-1)^n$
$\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right]$$

$$= -\frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right]$$

-1 ؛ n فردي
$+1$ ؛ n زوجي

$$= -\frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi} \cdot \frac{2n}{n^2 - 1}$$



$$= \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ فردي} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & ; \ n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & ; \ n \text{ فردي} \\ \dfrac{8k}{\pi(4k^2-1)} & ; \ \text{زوجي } n=2k \end{cases}$$

وبالتالي:

$$f(x) = \cos x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \cdot \sin(2kx) \ ; \ x \in]0,\pi[$$

لدراسة التقارب:

ولدينا F يحقق شروط مبرهنة ديرخليه عن:

① F مستمر على مجالات الجزئية $]-\pi,0[$ ، $]0,\pi[$.

② F مطرد (متناقص) على المجالات الجزئية $]-\pi,0[$ ، $]0,\pi[$.

وبالتالي:

$$\cos x = \sum \frac{8k}{\pi(4k^2-1)} \cdot \sin(2kx) \ ; \ x \in]0,\pi[$$

والسلسلة تتقارب عند أطراف المجال f (عند $x=0$, $x=\pi$) من الصفر.

صيغة بارسيفال (مساواة بارسيفال) ونصها:

ليكن f تابع معرف على R دوري ودوره 2π ومستمر على مجالات جزئية من المجال $]-\pi,\pi[$

عندئذ يكون:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$